АНАЛИЗ НА РЕШЕНИЕТО НА ЗАДАЧА
КНХ

Задачата КНХ първоначално беше подготвена като предложение за БОИ 2015, което се проведе в България. Тъй като обаче не беше ползвана там, а за Есенните трябваше по-сложна задача, в крайна сметка беше решено да бъде дадена на Зимните.

Задачата е относително проста (беше планирана като лесна на балканиадата), като не изисква особено сложен код, нито много оригинална идея, стига да сте виждали поне една подобна задача. Дори да не сте виждали и да не се сетите за идеята, обаче, може лесно да хванете точки, като имплементирате тривиалното изчерпване, което би ви донесло немалък брой точки.

Лесното решение всъщност трябва да могат да напишат всички (или почти всички) в тази възрастова група. То е със сложност $O(3^K * N * K)$ и при **K** до около 13 би трябвало да работи без проблем. Трябва просто да направим един цикъл, в който определяме какви ще са нашите **K** знака (от тук идва $O(3^K)$), и за всяка конфигурация още един цикъл, който проверява дали се постига равенство с всеки от състезателите ($O(N * K)$). Всъщност се оказва, че има доста малко типове тестове, при които това решение достига максималната си сложност, особено ако направите оптимизации от типа на това да държите само уникални "стратегии" (тоест ако двама човека са с една и съща стратегия да запазите само една от тях).

Решението за 100 точки експлоатира факта, че макар и 3***K** да е много, то не е *чак* толкова много, при **K** <= 20. Всъщност, 3^{20} е едва 3,486,784,401 – само няколко пъти повече, отколкото бихте могли да изчислите за секунда на модерен процесор. Ще приложим една относително готина (но и известна) стратегия – "meet in the middle". Нейната идея е да разделим задачата на две почти равни части, да намерим решенията за всяка от тях, и да ги обединим. Забележете, че ако можем да правим това рекурсивно, бихме стигнали до "разделяй и владей". Когато това обаче не е възможно да се прави много пъти, но все пак може да се направи веднъж, решението е от типа "meet-in-the-middle".

Какво би станало, ако вместо **K** знака имахме K/2? Тогава най-простата рекурсия би работила, тъй като $100 * 10 * 3^{10}$ спокойно влиза в ограниченията ни по време и по памет. Защо, тогава, не разделим знаците на "първа половина" и "втора половина" и не решим всяка половина по отделно? Ако имаме решение, което постига равенство с всички състезатели при първите K/2 знака, и друго, което постига равенство с всички при останалите K/2 знака, то комбинирани, двете решения биха дали решение и за цялата задача!

Това е вярно, но не достатъчно. Нека разгледаме пример, доста подобен на този от задачата (**N** = 6, **K** = 10):
ХНКХНХКННХ
ННКККХККНН
ХХККНКККНК
ХННКККХККК
ННКНКНКХКХ
НКХКХХНКНК

Нека разделим знаците на две половини по 5:
ХНКХН ХКННХ

ННККК ХККНН
ХХККН КККНК
ХННКК КХККК
ННКНК ННХКХ
НКХКХ ХНКНК
Ако първите 5 хода на Ели са "НХККХ", то тя би постигнала -2 срещу първия играч, 0 срещу втория, -2 срещу третия, 0 срещу четвъртия, +1 срещу петия, и 0 срещу шестия.
Ако вторите й 5 хода са: "НХННХ", то тя би постигнала +2 срещу първия играч, 0 срещу втория, +2 срещу третия, 0 срещу четвъртия, -1 срещу петия, и 0 срещу шестия.
Забелязваме, че като "комбинираме" първите 5 и вторите 5, реалният резултат срещу всеки играч би бил 0.

Решението почти директно имплементира горната идея. В един цикъл до $3^{K/2}$ изчисляваме резултатите срещу всеки от **N**-те играчи ако пробваме всички различни комбинации с първата половина знаци. Тези "варианти" трябва да държим в някаква удобна за нас структура (map, hashmap, trie – в случая всяка от тях би била окей, но дори вектор от вектори, който сортираме и после търсим с двоично търсене би свършил работа). След това правим втори цикъл по втората половина от знаците (отново около $3^{K/2}$), като ползваме бързото търсене в избраната от нас структура за да намерим обратните резултати. Само намирайки същите резултати умножени по -1 бихме могли да гарантираме, че Ели ще постигне равен резултат с всеки.

Така решението става със сложност $O(3^{K/2} * N * K)$, което вече е достатъчно бързо (около 30 пъти по-бързо, за максималните ограничения на задачата).

Автор: Александър Георгиев