

АНАЛИЗ НА РЕШЕНИЕТО НА ЗАДАЧА ТАБЛИЦА

При по-малки стойности на N задачата може да се реши чрез пълно изчерпване. За целта се генерират всички възможности за допълване на множествата A и B с числа от множеството C така, че както в A , така и в B да има по N числа. След това попълваме първия ред на таблицата с числата от A , а втория ред – с числата от B , като следим и в двата реда числата да образуват растящи редици. Накрая проверяваме дали всяко число от първия ред е по-малко от съответното му число от втория ред и ако това е така, отброяваме намереното правилно попълване на таблицата. Реализацията на тази идея би получило 45% от предвидените точки за задачата. Такова решение обаче не може да работи за всички стойности на N , M и K . Само ще отбележим, че при фиксирано N очевидно отговорът ще бъде най-голям, когато множествата A и B са празни. В тези случаи отговорът на задачата е N -тото число на Каталан. При $N = 35$ броят на коректно попълнените таблици е 3116285494907301262.

За решаване на задачата в общия случай, ще я заменим с еквивалентна на нея задача.

Под *правилна редица от отварящи и затварящи скоби* ще разбираме редица, в която броят на отварящите и броят на затварящите е равен и в която във всеки префикс на редицата броят на отварящите скоби не е по-малък от броя на затварящите скоби.

Да разгледаме редица, която се състои от $2N$ символа всеки от които е $($, $)$ или $?$. Правилото за образуване на тази редица е следното:

$$\text{Символът на позиция } p \text{ е: } \begin{cases} (& \text{при } p \in A \\) & \text{при } p \in B \\ ? & \text{при } p \in C \end{cases}$$

Например, ако $N = 4$, $A = \{2, 3\}$, $B = \{4, 7, 8\}$ и $C = \{1, 5, 6\}$ редицата е следната $?(()??)$. Може да се установи взаимно еднозначно съответствие между всяко попълване на таблицата, отговарящо на условието на задачата и замяна на въпросителните с отварящи или затварящи скоби, при която се получава *правилна редица от скоби*. Така задачата за намиране на броя на коректните попълвания на таблицата се свежда до следната задача:

Нека S е редица от отварящи, затварящи скоби и въпросителни, която се образува по описаните по-горе правила и съответства на зададените в условието на задачата множества A , B и C . По колко начина могат да се заменят въпросителните в S с отварящи и затварящи скоби така, че S да стане *правилна редица от скоби*.

Да означим с $t[i]$ разликата между общия брой на отварящите и затварящите скоби в префикса на S , който е с дължина i . S е правилна редица от скоби тогава и само тогава, когато $t[i] \geq 0$ за всяко i от 1 до $2N$ и освен това $t[2N] = 0$. Да означим с $r[i][j]$ броя на начините за замяна на въпросителните сред първите i символа на S с отварящи и затварящи скоби така, че $t[k] \geq 0$ за всяко k от 1 до i , а $t[i] = j$. Тогава

отговорът на задачата е $r[2N][0]$. Нека i -тият символ на S е $S[i]$. Вярна е следната рекурентна зависимост:

$$r[i][j] = \begin{cases} r[i-1][j-1] & \text{при } S[i] = (\\ r[i-1][j+1] & \text{при } S[i] =) \\ r[i-1][j-1] + r[i-1][j+1] & \text{при } S[i] = ? \end{cases}$$

Началните условия са: $r[0][j] = 0$, $r[i][-1] = 0$ и $r[0][0] = 1$.

Автор: Младен Манев